有理函数的积分

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 1 (有理分式)

两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为**有理函数**, 由称**有理分式**. 这里假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式的次数时, 称这有理函数为**真分式**, 否则称为**假分式**.

定义 1 (有理分式)

两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为**有理函数**, 由称**有理分式**. 这里假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式的次数时, 称这有理函数为**真分式**, 否则称为**假分式**.

- **真分式:** $\frac{x+1}{x^2+2}$.

定义 1 (有理分式)

两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为**有理函数**, 由称**有理分式**. 这里假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式的次数时, 称这有理函数为**真分式**, 否则称为**假分式**.

- **真分式:** $\frac{x+1}{x^2+2}$.
- **假分式:** $\frac{x^3+1}{2x^2+1}$

定义 1 (有理分式)

两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为**有理函数**, 由称**有理分式**. 这里假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式的次数时, 称这有理函数为**真分式**, 否则称为**假分式**.

- 真分式: $\frac{x+1}{x^2+2}$.
- 假分式: $\frac{x^3+1}{2x^2+1}$
- 假分式总可以分解为一个多项式与一个真分式之和的形式.

定义 1 (有理分式)

两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为**有理函数**, 由称**有理分式**. 这里假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式的次数时, 称这有理函数为**真分式**, 否则称为**假分式**.

- 真分式: $\frac{x+1}{x^2+2}$.
- 假分式: $\frac{x^3+1}{2x^2+1}$
- 假分式总可以分解为一个多项式与一个真分式之和的形式.

$$\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1} = 2x^2-1+\frac{4}{x^2+1} \qquad \frac{x^3+1}{2x^2+1} = \frac{1}{2}x - \frac{x-2}{4x^2+2}$$

部分分式之和

对于真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，如果分母可分解为两个多项式的乘积，

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$$

部分分式之和

对于真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，如果分母可分解为两个多项式的乘积，

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$$

且 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 没有公因式，则此真分式可以拆分为两个真分式之和

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

部分分式之和

对于真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，如果分母可分解为两个多项式的乘积，

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$$

且 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 没有公因式，则此真分式可以拆分为两个真分式之和

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

如果 $Q_1(x)$ 或 $Q_2(x)$ 还能分解成两个没有公因式的多项式的乘积，上述拆分过程可以进一步对 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 或 $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 使用.

例

将真分式 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 拆分为两个真分式之和.

例

将真分式 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 拆分为两个真分式之和.

解　因为分母可以表示为 $(x-2)(x-3)$, 故

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

其中 A, B 为待定系数.

例

将真分式 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 拆分为两个真分式之和.

解　因为分母可以表示为 $(x-2)(x-3)$, 故

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

其中 A, B 为待定系数.

上式右端通分后可改写为

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6} = \frac{x(A+B)-(3A+2B)}{x^2-5x+6}$$

例

将真分式 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 拆分为两个真分式之和.

解　因为分母可以表示为 $(x-2)(x-3)$, 故

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

其中 A, B 为待定系数.

上式右端通分后可改写为

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6} = \frac{x(A+B)-(3A+2B)}{x^2-5x+6}$$

故

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Longrightarrow A=-3, B=4.$$

例 1

求 $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$

例 1

求 $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$

解

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x$$

例 1

求 $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x \\ &= 4\int \frac{1}{x-3}\mathrm{d}(x-3) - 3\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}(x-2) \\ &= 4\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C.\end{aligned}$$

例 2

求 $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} \mathrm{d}x$

例 2

求 $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$

解　首先将被积有理函数拆分为真分式之和. 设

$$\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

例 2

求 $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$

解　首先将被积有理函数拆分为真分式之和. 设

$$\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

右端通分得到

$$\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(2x+1)}{(2x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2(A+2B)+(A+B+2C)x+(A+C)}{(2x+1)(x^2+x+1)}$$

故

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ A+B+2C=1 \\ A+C=2 \end{cases} \Longrightarrow A=2, B=-1, C=0.$$

故

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ A+B+2C=1 \\ A+C=2 \end{cases} \Longrightarrow A=2, B=-1, C=0.$$

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{x}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ A+B+2C=1 \\ A+C=2 \end{cases} \Longrightarrow A=2, B=-1, C=0.$$

因此

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{x}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}(2x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \ln|2x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

例 3

求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} \mathrm{d}x$

例 3

求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}\mathrm{d}x$

解　分母可以分解为两个没有公因式的多项式的乘积 $(x-1)^2(x+1)$. 设

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

其中 A,B,C 为待定系数.

例 3

求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} \mathrm{d}x$

解　分母可以分解为两个没有公因式的多项式的乘积 $(x-1)^2(x+1)$. 设

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

其中 A,B,C 为待定系数.

右端通分得到

$$\frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{(A+C)x^2+(A+B-2C)x+B+C}{(x-1)^2(x+1)}$$

故

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-2C=1 \\ B+C=-3 \end{cases} \Longrightarrow A=1, B=-2, C=-1.$$

故

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-2C=1 \\ B+C=-3 \end{cases} \Longrightarrow A=1, B=-2, C=-1.$$

$$\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

故

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-2C=1 \\ B+C=-3 \end{cases} \Longrightarrow A=1, B=-2, C=-1.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x-1-1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-2C=1 \\ B+C=-3 \end{cases} \Longrightarrow A=1, B=-2, C=-1.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x-1-1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1) - \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\
&= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| + C
\end{aligned}$$

例 5

求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$

例 5

求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$

解　令 $\sqrt{x-1}=u$，则 $x=u^2+1$，$\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$．代入所求积分

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{u}{u^2+1}2u\mathrm{d}u = \int \frac{2u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{2u^2+2-2}{u^2+1}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

例 5

求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$

解　令 $\sqrt{x-1}=u$，则 $x=u^2+1$，$\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$．代入所求积分

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{u}{u^2+1}2u\mathrm{d}u = \int \frac{2u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{2u^2+2-2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= \int 2\mathrm{d}u - 2\int \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= 2u - 2\arctan u + C\end{aligned}$$

例 5

求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$

解　令 $\sqrt{x-1}=u$，则 $x=u^2+1$，$\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$．代入所求积分

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{u}{u^2+1}2u\mathrm{d}u = \int \frac{2u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{2u^2+2-2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= \int 2\mathrm{d}u - 2\int \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= 2u-2\arctan u + C \\ &= 2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C.\end{aligned}$$

例 7

求 $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

例 7

求 $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解　要同时去掉 $\sqrt[3]{x}$ 和 $\sqrt{x}$ 需要找到 3 和 2 的最小公倍数, 故令 $x = u^6$, $\mathrm{d}x = u^6 = 6u^5\mathrm{d}u$.

代入所求不定积分

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{6u^5}{u^3+u^5}\mathrm{d}u(u \neq 0)\\ &= 6\int \frac{u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u\\ &= 6\int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\mathrm{d}u = 6\int \mathrm{d}u - 6\int \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u\\ &= 6u - 6\arctan u + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\arctan\sqrt[6]{x} + C.\end{aligned}$$

随堂练习

1. 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$
2. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$

随堂练习

1. 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}| + C$
2. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x = -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right) + \ln|x| + C$

作业

- 教材习题 4-4: 2, 6, 11, 19, 20, 21, 22.